त्रिकोणमितीय समीकरण एवं सर्वसमिकाएँ

[Trigonometric Equation And Identities]

अध्याय 09

हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ व $\operatorname{cosec}\theta$ के बारे में कक्षा–9 में पढ़ा है। ये किसी भी कोण के लिए पता किए जा सकते हैं परन्तु इस अध्याय में हम इनकी चर्चा न्यून कोणों के लिए ही करेंगे।

आकृति–1 (i)

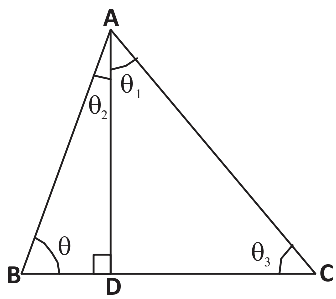
त्रिभुज ABC में कोण B लें। क्या आप $\angle B = \theta$ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को पता कर सकते हैं?

कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को पता करने के लिए हमें इस कोण को शामिल करते हुए एक समकोण त्रिभुज बनाना होगा।

ΔABC के θ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए समकोण त्रिभुज कैसे बनाएँ ?

हम ΔABC में शीर्ष A से भुजा BC पर लंब AD डालेंगे। अब प्राप्त समकोण त्रिभुज ADB व त्रिभुज ADC में आकृति 1(ii) न्यून कोण θ एवं θ_1 के लिए निम्नलिखित सारणी को पूर्ण कीजिए:–

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{AD}{AB}$					
$\sin\theta_1$	$\cos\theta_1$	$\tan\theta_1$	$\cot\theta_1$	$\sec\theta_1$	$\operatorname{cosec}\theta_1$
$\frac{CD}{AC}$					



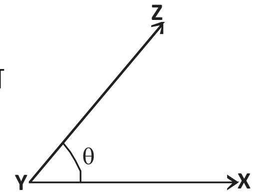
आकृति–1(ii)

करके देखें

आकृति–1(ii) में कोण θ_2 व θ_3 के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

सोचें एवं चर्चा करें

दिए गए $\angle XYZ = \theta$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात कैसे ज्ञात करेंगे?



त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध

पिछली कक्षा में हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच कुछ संबंधों को जाना है।

आइए, अब हम इन त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच कुछ और संबंध ढूंढ़ते हैं–

समकोण त्रिभुज ACB में कोण C समकोण है।(आकृति–2) पाइथागोरस प्रमेय से–

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad .....(1)$$

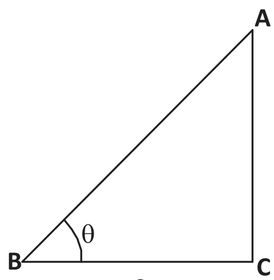
उपरोक्त समीकरण को AB^2 से भाग देने पर

$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AB}\right)^2$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad .....(2)$$



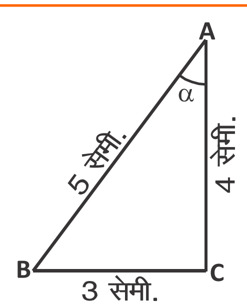
आकृति–2

$\sin\theta$ व $\cos\theta$ के बीच प्राप्त यह संबंध क्या θ के $0°$ से $90°$ तक के सभी मानों के लिए सत्य है? अपने उत्तर के लिए उचित तर्क दीजिए।

करके देखें

(i) $\theta = 30°, 45°, 60°$ के लिए प्राप्त संबंध $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

(ii) दी गई आकृति के लिए $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ की सत्यता की जाँच कीजिए।



आप पाएँगे कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, θ के $0°$ से $90°$ तक के सभी मानों के लिए सत्य है।

Daily Current Affairs | Govt. Jobs | SSC | Bank | Railway | IAS-PCS | GK | eBooks
तैयारी की पूरी जानकारी हिन्दी मे SarkariHelp.com

क्या त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच इसी प्रकार के अन्य संबंध भी हो सकते हैं? आइए देखें–

समीकरण (1) में BC^2 से भाग देने पर

$$\frac{AC^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AB^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{BC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$(\tan\theta)^2+1=(\sec\theta)^2$$

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta \qquad .....(2)$$

क्या उपरोक्त संबंध भी $0°$ से $90°$ तक के सभी कोणों के लिए सत्य है? आइए कोण के कुछ मानों के लिए अनुपातों के संबंध को देखें। उदाहरण के लिए जब $\theta = 0°$ हो–

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= 1+\tan^2\theta \\ &= 1+\tan^2 0° \\ &= 1+0 \\ &= 1 \\ \text{R.H.S.} &= \sec^2\theta \\ &= \sec^2 0° \\ &= 1 \end{aligned}$$

अतः यह $\theta = 0°$ के लिए सत्य है।

क्या यह $\theta = 90°$ के लिए भी सत्य है? क्योंकि $\theta = 90°$ के लिए $\tan\theta$ और $\sec\theta$ परिभाषित नहीं है, अतः हम $\theta = 90°$ को छोड़कर कह सकते हैं कि $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$, θ के उन सभी मानों के लिए सत्य है, जहाँ $0° \le \theta < 90°$ है।

आइए, अब हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच एक और संबंध देखते हैं। समीकरण (1) को AC^2 से भाग देने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है?

$$\frac{AC^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AC}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta \qquad .....(3)$$

हम जानते हैं कि $\theta = 0°$ के लिए $\cot\theta$ व $\text{cosec}\theta$ परिभाषित नहीं है अतः

$1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$, जहाँ $0° < \theta \le 90°$ है।

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त करना

हमने विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंध देखें हैं। क्या हम किसी भी एक त्रिकोणमितीय अनुपात में अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को रूपांतरित कर सकते हैं जैसे यदि हमें cosA व tanA को sinA के पदों में व्यक्त करना हो, तो

$$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

अतः $$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

और $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात होने पर अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कर सकते हैं।

करके देखें

1. secA को sinA के पदों में व्यक्त कीजिए।
2. सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को cosA के पदों में व्यक्त कीजिए।

हमने त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच संबंधों का अध्ययन किया है।

आइए, अब नीचे लिखे संबंध पर विचार करते हैं–

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$$

क्या यह संबंध सही है, आइए इसकी जाँच करें–

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$$

बायाँ पक्ष $$= \cot\theta + \tan\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \,.\, \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta . \cos\theta} \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\text{cosec}\theta}$$

$= \text{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$

= दायाँ पक्ष

अब हम इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण लेते हैं–

उदाहरण:–1. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

हल:– बायाँ पक्ष $= \sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2$ $\quad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ $\quad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \,.\, 1$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण:–2. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

= दायाँ पक्ष

उदहरणः—3. सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$$

हलः— बायाँ पक्ष $$=\frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\cos A\,.\,\cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A\,.\,\sin A}{\sin A-\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}{\cos A-\sin A}$$

$=\sin A+\cos A$ = दायाँ पक्ष

उदाहरणः—4. सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\,.\,\cos\theta}=\cot\theta$$

हल : बायाँ पक्ष $$=\frac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta+\sin\theta\,.\,\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta+1-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$=\cot\theta$ = दायाँ पक्ष

कभी–कभी हमें दिए गए प्रतिबंधों की सहायता से कुछ संबंधों को सिद्ध करना होता है आइए इसे कुछ उदाहरणों से समझते हैं–

उदाहरणः–5. यदि $\sin\theta + \cos\theta = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta - \cos\theta = \pm 1$

हलः– दिया गया है: $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \, . \cos\theta = 1$$

$$1 + 2\sin\theta \, . \cos\theta = 1 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$2\sin\theta \, . \cos\theta = 1 - 1$$

$$\sin\theta \, . \cos\theta = 0 \qquad .....(1)$$

अब

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta \, . \cos\theta$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \times 0$$ समी. (1) से

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरणः–6. यदि $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ हो।

तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

हलः– दिया है: $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

$$\sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta$$

$$\sin\theta = \cos\theta(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} = \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta}{2 - 1}$$

$$\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$$

यही सिद्ध करना था।

नए संबंध बनाना

यदि $x = \sin\theta$

$y = \cos\theta$

तो हम x व y के मध्य संबंध कैसे पता करेंगे?

हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों से θ को विलोपित कर x व y के बीच संबंध पता कर सकते हैं।

जैसे– $x^2 + y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$x^2 + y^2 = 1$

आइए, इसे कुछ और उदाहरणों से समझें–

उदाहरणः–7. यदि $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ और $y = a\sin\theta + b\cos\theta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

हलः– दिया है $x = a\cos\theta - b\sin\theta$ .....(1)

$y = a\sin\theta + b\cos\theta$ .....(2)

समी. (1) व (2) का वर्ग करने पर

$x^2 = (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$

$y^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

$x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta \,.\, \sin\theta$ .....(3)

$y^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta \,.\, \cos\theta$ .....(4)

समी. (3) व (4) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta \,.\, \sin\theta \\ &\quad + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta \,.\, \cos\theta \\ &= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2 \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \end{aligned}$$

उदाहरणः–8. यदि $\tan\theta + \sin\theta = m$ और $\tan\theta - \sin\theta = n$ हो तो सिद्ध कीजिए कि–

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

हलः– दिया है $m = \tan\theta + \sin\theta$

$n = \tan\theta - \sin\theta$

$m + n = 2\tan\theta$

$m - n = 2\sin\theta$

अब, $(m-n)(m+n) = 4\sin\theta \,.\, \tan\theta$

$$m^2 - n^2 = 4\sin\theta \,.\, \tan\theta \qquad .....(1)$$

$$m \,.\, n = (\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)$$

$$= \tan^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta[1-\cos^2\theta]}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta . \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta \,.\, \tan^2\theta$$

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{\sin^2\theta . \tan^2\theta}$$

$$= 4\sin\theta \,.\, \tan\theta$$

$4\sqrt{mn} = m^2 - n^2$ समी. (1) से

या $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली–1

निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए–

1. $\frac{1}{\sec\theta - 1} - \frac{1}{\sec\theta + 1} = 2\cot^2\theta$
2. $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \,.\, \mathrm{cosec}^2\theta$
3. $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \,.\, \cos^2 A$
4. $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \mathrm{cosec}\theta - \cot\theta$
5. $(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

6. $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4\cot\theta\,\text{cosec}\theta$

7. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\,\text{cosec}\theta$

8. यदि $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

9. यदि $\tan\theta=n\tan\phi$ तथा $\sin\theta=m\sin\phi$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\theta=\dfrac{m^2-1}{n^2-1}$

10. यदि $x=a\,\text{cosec}\theta$ तथा $y=b\cot\theta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

11. यदि $x=r\sin A\cos C$, $y=r\sin A\sin C$ और $z=r\cos A$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $r^2=x^2+y^2+z^2$

सर्वसमिका व त्रिकोणमितीय समीकरण

हमने त्रिकोणमितीय अनुपात $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta$, $\text{cosec}\theta, \cot\theta$ के आपस में संबंध को जाना है। इन संबंधों में हमने एक संबंध $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ देखा है। यह संबंध θ के सभी मानों के लिए सत्य है। त्रिकोणमितीय अनुपातों के ऐसे संबंध को, जो कोण के रूप में दिए गए चर के सभी मानों के लिए सत्य हो,त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है।

तब, क्या संबंध $\sin\theta+\cos\theta=1$ भी एक सर्वसमिका है?

आइए देखें,

$\theta=0^\circ$ लेने पर

$=\sin 0^\circ+\cos 0^\circ$

$=0+1$

$=1$

$\theta=30^\circ$ के लिए

$=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\neq 1$

हमने देखा कि $\theta = 0°$ के लिए यह संबंध सत्य है लेकिन $\theta = 30°$ के लिए सत्य नहीं है। अतः हम $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को सर्वसमिका नहीं कह सकते ।

कोण के रूप में दिए गए चर के कुछ विशेष मानों के लिए कुछ त्रिकोणमितीय संबंध सत्य होते हैं इन्हें त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं। तब क्या हम $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को त्रिकोणमितीय समीकरण कह सकते हैं? हमने देखा कि $\theta = 0°$ के लिए यह संबंध सत्य है लेकिन $\theta = 30°$ के लिए सत्य नहीं है अतः $\sin\theta + \cos\theta = 1$ त्रिकोणमितीय समीकरण है।

करके देखें

दिए गए संबंधों में $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ मानों को रखिए और जाँच कीजिए कि यह θ के किन मानों के लिए सत्य है–

1. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$
2. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$
3. $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$
4. $\tan\theta . \sec\theta = 2\sqrt{3}$

θ के जिन मानों के लिए त्रिकोणमितीय समीकरण सत्य है। वे मान त्रिकोणमितीय समीकरण के हल कहलाते हैं।

आइए, अब कुछ त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करें–

उदाहरणः–9. $\sqrt{3}\tan\theta - 2\sin\theta = 0$ को हल कीजिए।

हलः– $\sqrt{3}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\sin\theta = 0$ $\left[\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$

$\sqrt{3}\sin\theta - 2\sin\theta . \cos\theta = 0$

$\sin\theta(\sqrt{3} - 2\cos\theta) = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0°$

अब $\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad -2\cos\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30°$

अतः $\theta = 0°, 30°$

उदाहरणः—10. $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$ को हल कीजिए। जहाँ $0° \le x \le 90°$

हलः— $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$x = 60°$

तथा $(\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

क्योंकि $0° \le x \le 90°$ के लिए $\cos x$ ऋणात्मक नहीं होता है। अतः हम $\cos x = -1$ को छोड़ देते हैं। इसलिए समीकरण का हल $x = 60°$ है।

उदाहरणः—11. निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरण के हल ज्ञात कीजिए जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2$$

हलः—

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta(\operatorname{cosec}\theta - 1) + \cos\theta(\operatorname{cosec}\theta + 1)}{\operatorname{cosec}^2\theta - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta[\operatorname{cosec}\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta + 1]}{\cot^2\theta} = 2 \qquad [\because \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta \,.\, 2\operatorname{cosec}\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\theta \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\cot\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2\tan\theta = 2$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan 45°$$

$$\therefore \quad \theta = 45°$$

प्रश्नावली–2

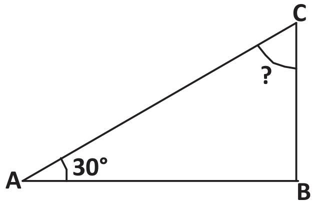
1. दिए गए त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल कीजिए जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

(i) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$ (ii) $2\sin^2\theta - \cos\theta = 1$

(iii) $3\tan^2\theta = 2\sec^2\theta + 1$ (iv) $\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 = \sin^2\theta$

(v) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति–3

एक समकोण ΔABC में यदि $\angle A = 30°$ तब $\angle C$ क्या होगा? (आकृति–3)

और यदि $\angle C = 60°$ तो क्या $\angle A$ का मान पता कर सकते हैं? (आकृति–4)

क्या $\angle A$ व $\angle C$ के बीच कोई ऐसा संबंध है जिससे एक कोण का मान पता होने पर हम दूसरे कोण का मान पता कर सकें ?

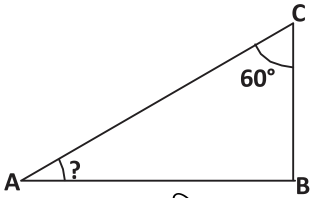
हम जानते हैं कि ΔABC में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$\because \angle B = 90°$$

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = 90°$$

यानी $\angle A$ व $\angle C$ पूरक कोण हैं।



आकृति–4

अब त्रिभुज ABC में (आकृति–5)

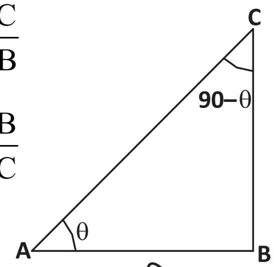
$\angle A = \theta$ तो $\angle C = 90° - \theta$

तब क्या $\angle A$ व $\angle C$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच भी कोई संबंध है ?

क्या दिए गए त्रिभुज में $(90°-\theta)$ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात को θ कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात में परिवर्तित किया जा सकता है? कैसे?

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} \qquad \cot\theta = \frac{AB}{AC}$$



आकृति–5

अब $\angle C = (90°-\theta)$ के लिए ΔABC में त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin(90°-\theta) = \frac{AB}{AC}, \quad \cos(90°-\theta) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan(90°-\theta) = \frac{AB}{BC},$$

$$\operatorname{cosec}(90°-\theta) = \frac{AC}{AB}, \quad \sec(90°-\theta) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot(90°-\theta) = \frac{BC}{AB}$$

कोण θ व $(90°-\theta)$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों की तुलना करने पर हमें नीचे दिए संबंध प्राप्त होंगे–

$$\sin(90°-\theta) = \frac{AB}{AC} = \cos\theta, \quad \cos(90°-\theta) = \frac{BC}{AC} = \sin\theta$$

$\tan(90°-\theta) = \cot\theta$ और $\cot(90°-\theta) = \tan\theta$

$\sec(90°-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$ और $\operatorname{cosec}(90°-\theta) = \sec\theta$

सोचें एवं चर्चा करें

क्या उपरोक्त संबंध $0° \le \theta \le 90°$ के सभी मानों के लिए सत्य है?

करके देखें

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंध का प्रयोग करके नीचे की सारणी को पूर्ण कीजिए।

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	....	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	....	1
$\cos\theta$	....	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	....	$\frac{1}{2}$	....

पूरक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग

आइए हम यह देखें कि पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से त्रिकोणमितीय सारणी का बिना प्रयोग किए मान कैसे ज्ञात करते हैं? क्या उन कोणों के लिए जिनके त्रिकोणमितीय अनुपात पता करना सरल नहीं है, हम इनका उपयोग कर सकते हैं?जैसे $\theta = 31°$ या फिर $13°$ और $\phi = 20°$ या $43°$ आदि।

अब हम $\dfrac{2\sin 30°}{\cos 60°}$ का मान त्रिकोणमितीय सारणी का प्रयोग किए बगैर ही ज्ञात करके देखते हैं।

$$\frac{2\sin 30°}{\cos 60°}$$

$$= \frac{2\sin 30°}{\cos(90° - 30°)} \qquad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$$

$$= 2\frac{\sin 30°}{\sin 30°}$$

$$= 2$$

इसी प्रकार $\dfrac{3\tan 15°}{\cot 75°}$ का मान ज्ञात करना हो तो

$$\frac{3\tan 15°}{\cot 75°}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\cot(90° - 15°)}$$

$$= \frac{3\tan 15°}{\tan 15°}$$

$$= 3$$

उदाहरणः—12. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$ (b) $\dfrac{\sec 70°}{\operatorname{cosec} 20°} + \dfrac{\sin 59°}{\cos 31°}$

हलः— (a) $\dfrac{\sin 31°}{2\cos 59°}$

$$= \frac{\sin(90^0 - 59^0)}{2\cos 59^0}$$

$$= \frac{\cos 59°}{2\cos 59°} \qquad [\because \quad \sin(90°–\theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{1}{2}$$

(b) $$\frac{\sec 70°}{\operatorname{cosec} 20°} + \frac{\sin 59°}{\cos 31°}$$

$$= \frac{\sec(90° - 20°)}{\operatorname{cosec} 20°} + \frac{\sin(90° - 31°)}{\cos 31°} \qquad \left[\begin{array}{l}\therefore \sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta \\ \sin(90° - \theta) = \cos\theta\end{array}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} 70°}{\operatorname{cosec} 70°} + \frac{\cos 31°}{\cos 31°}$$

$= \quad 1 + 1$

$= \quad 2$

उदाहरणः—13. $\left(\frac{\sin 47°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos 43°}{\sin 47°}\right)^2 - 4\cos^2 45°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः— $$\left(\frac{\sin 47°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos 43°}{\sin 47°}\right)^2 - 4\cos^2 45°$$

$$= \left(\frac{\sin(90° - 43°)}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\cos(90° - 47°)}{\sin 47°}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos 43°}{\cos 43°}\right)^2 + \left(\frac{\sin 47°}{\sin 47°}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$= 1 + 1 - 2$

$= 0$

उदाहरणः—14. सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83° = \sqrt{3}$$

हलः– बायाँ पक्ष $= \tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$$= \tan (90° - 83°) \tan (90° - 67°) \tan 60° \tan 67° \tan 83°$$

$$= \cot 83° \cot 67° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$$

$$= \cot 83° \tan 83° \cot 67° \tan 67° \tan 60°$$

$$= \cot 83° \times \frac{1}{\cot 83°} \times \cot 67° \times \frac{1}{\cot 67°} \times \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

त्रिकोणमितीय समीकरण हल करना

अब हम निम्नलिखित समीकरण पर विचार करते हैं–

$\cos(90° - \theta) = \frac{1}{2}$ में अज्ञात कोण θ का मान मालूम करने लिए हम निम्नलिखित तरीके का उपयोग करेंगे।

$$\cos (90° - \theta) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sin 30°$$

$$\theta = 30°$$

आइए इसे कुछ और उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरणः–15. यदि $\sin 55° \operatorname{cosec} (90° - \theta) = 1$, तो θ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

हलः– $\sin 55° \operatorname{cosec} (90° - \theta) = 1$

$$\Rightarrow \quad \sin (90° - 35°) \sec\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos 35° . \sec\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos 35°}$$

$$\Rightarrow \quad \sec\theta = \sec 35°$$

$$\therefore \quad \theta = 35°$$

उदाहरणः–16. यदि $\sin 34° = p$ हो, तो $\cot 56°$ का मान ज्ञात करो।

हलः– $\sin 34° = p$

$\sin(90° - 56°) = p$

$\cos 56° = p$ .....(1)

हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - \cos^2 56°$

$\Rightarrow \sin^2 56° = 1 - p^2$ .....(2)

$\Rightarrow \sin 56° = \sqrt{1-p^2}$

अतः समी. (1) व (2) से

$$\cot 56° = \frac{\cos 56°}{\sin 56°}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

उदाहरणः–17. यदि $\cot 3A = \tan(A - 22°)$ जहाँ 3A न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया है – $\cot 3A = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow \tan(90° - 3A) = \tan(A - 22°)$

$\Rightarrow 90° - 3A = A - 22°$

$\Rightarrow 90° + 22° = A + 3A$

$\Rightarrow 112° = 4A$

$\Rightarrow A = \frac{112°}{4}$

$\therefore A = 28°$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों को पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग कर सिद्ध किया जा सकता है। आइए देखें–

उदाहरणः–18. सिद्ध कीजिए कि– $\frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta} = \cos^2\theta$

हलः– बायाँ पक्ष $= \frac{\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta)}{\tan\theta}$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta \sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{\sin\theta}$$

$= \cos^2\theta$

= दायाँ पक्ष

उदाहरणः–19. सिद्ध कीजिए कि $\sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta = 2$

हलः– बायाँ पक्ष $= \sin(90° - \theta)\sec\theta + \cos(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta$

$= \cos\theta\sec\theta + \sin\theta\operatorname{cosec}\theta$

$$= \cos\theta \times \frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$$

$= 1 + 1$

$= 2$

= दायाँ पक्ष

उदाहरणः–20. यदि $\angle A, \angle B$ व $\angle C$ त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

हलः– दिया है कि A, B व C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हैं।

तो $A + B + C = 180°$

$A + B = 180° - C$ .....(1)

पुनः बायाँ पक्ष $= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{180° - C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{180°}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{C}{2}$$

= दायाँ पक्ष

आइए अब हम देखें कि दिए गए कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को $0°$ से $45°$ के त्रिकोणमितीय अनुपात में कैसे परिवर्तित कर सकते हैं।

उदाहरणः–21. $\tan 59° + \cot 75°$ को $0°$ से $45°$ के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त कीजिए।

हलः– $\tan 59° + \cot 75° = \tan(90° - 31°) + \cot(90° - 15°)$

$= \cot 31° + \tan 15°$

$[\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\cot(90° - \theta) = \tan\theta]$

प्रश्नावली–3

1. निम्नलिखित में $0°$ से $45°$ के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त कीजिए–

   (i) $\sin 56°$ (ii) $\tan 81°$ (iii) $\sec 73°$

2. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\dfrac{\cos 80°}{\sin 10°}$ (ii) $\dfrac{\sin 37°}{2\cos 53°}$ (iii) $3\sin 17° \sec 73°$

3. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\sin 64° - \cos 26°$

   (ii) $3\cos 80° \operatorname{cosec} 10° + 2\cos 59° \operatorname{cosec} 31°$

   (iii) $2\dfrac{\cos 67°}{\sin 23°} - \dfrac{\tan 40°}{\cot 50°} + \cos 0°$ (iv) $\sin^2 35° + \sin^2 55°$

   (v) $\left(\dfrac{5\sin 35°}{\cos 55°}\right) + \left(\dfrac{\cos 55°}{2\sin 35°}\right) - 2\cos 60°$

4. सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27° = 1$

(ii) $\tan 15° \tan 36° \tan 45° \tan 54° \tan 75° = 1$

(iii) $\sin^2 85° + \sin^2 80° + \sin^2 10° + \sin^2 5° = 2$

5. सिद्ध कीजिए कि–

$$\sin(90° - \theta)\cos(90° - \theta) = \frac{\tan\theta}{1 + \cot^2(90° - \theta)}$$

6. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\cos\theta}{\sec\ (90°-\theta) + 1} + \frac{\sin(90° - \theta)}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = 2\cot(90° - \theta)$$

7. सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{\tan(90° - \theta)}{\operatorname{cosec}^2\theta . \tan\theta} = \cos^2\theta$$

8. यदि $\sin A = \cos B$ तो सिद्ध कीजिए कि– $A + B = 90°$

9. यदि $\operatorname{cosec} 2A = \sec (A - 36°)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $A + B = 90°$, $\sec A = a$, $\cot B = b$ तब सिद्ध कीजिए कि– $a^2 - b^2 = 1$

11. यदि A, B व C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हों तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\tan\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

12. यदि $\sec 34° = x$ तो $\cot^2 56° + \operatorname{cosec} 56°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्नलिखित संबंध होते हैं–

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ जहाँ $0° \le \theta \le 90°$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ जहाँ $0° \le \theta < 90°$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ जहाँ $0° < \theta \le 90°$

2. किसी भी त्रिकोणमितीय अनुपात को किसी अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात के पदों में लिखा जा सकता है।

3. सर्वसमिकाएँ वे समीकरण हैं जो कोणों के चर के सभी मानों के लिए सत्य होते हैं।

4. कोण θ के किसी मान के लिए यदि एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।

5. पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्नलिखित संबंध होते हैं–

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$, $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90° - \theta) = \text{coesc}\,\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

6. सर्वसमिकाओं को जाँचना व सिद्ध करना, कोणों के कुछ मानों के आधार पर नहीं किया जा सकता।

उत्तरमाला–2

1(i).	$\theta = 30°, 90°$	1(ii).	$\theta = 60°$	1(iii).	$\theta = 60°$
1(iv).	$\theta = 0, 60°$	1(v).	$\theta = 60°$		

उत्तरमाला–3

1.	(i)	cos 34°	(ii)	cot 9°	(iii)	cosec 17°
2.	(i)	1	(ii)	$\frac{1}{2}$	(iii)	3
3.	(i)	0	(ii)	5	(iii)	2
	(iv)	1	(v)	$\frac{9}{2}$		
9.	42°					
12.	$x^2 + x - 1$					