पाठ्यक्रम सत्र 2008-09

पाठ्यक्रम आधारित अध्यापन प्रशिक्षण निर्देशिका

कक्षा 12वीं

गणित

माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल

प्रश्न–पत्र ब्लूप्रिन्ट

BLUE PRINT OF QUESTION PAPER

कक्षा :– **XII** परीक्षा : हायर सेकण्डरी पूर्णांक :– 100

विषय :– उच्च गणित समय : 3 घण्टे

स. क्र.	इकाई	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या			कुल प्रश्न
			1 अंक	4 अंक	5 अंक	6 अंक	
1.	आंशिक भिन्न	05	01	01	–	–	01
2.	प्रतिलोम फलन	05	01	01	–	–	01
3. 4. 5	त्रिविमीय ज्यामितीय समतल सरल रेखा एवं गोला	15	04	–	01	01	02
6. 7. 8.	सदिश सदिशों का गुणनफल सदिशों का त्रिविमीय ज्यामितीय में अनुप्रयोग	15	04	–	01	01	02
9.	फलन, सीमा तथा सांतत्य	05	–	–	01	–	01
10. 11.	अवकलन कठिन अवकलन	10	02	02	–	–	02
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	05	01	01	–	–	01
13. 14. 15.	समाकन कठिन समाकलन निश्चित समाकलन	15	05	–	02	–	02
16.	अवकल समीकरण	02	–	–	01	–	01
17.	सहसंबंध	05	01	01	–	–	01
18.	समाश्रयण	05	01	01	–	–	01
19.	प्रायिकता	05	–	–	01	–	01
20.	आंकिक विधियाँ	05	05	–	–	–	–
	योग =	100	25	07	07	02	16

निर्देश :

1. प्रश्न क्रमांक 1 के पाँच भाग होंगे प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न (प्रत्येक एक–एक अंक के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे जिसके अन्तर्गत रिक्त स्थानों की पूर्ति, एक शब्द में उत्तर, सही जोड़ी, सही विकल्प तथा सत्य असत्य का चयन आदि के प्रश्न होंगे।)
2. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर सभी प्रश्नों में विकल्प का प्रावधान रखा जाये। यह विकल्प समान इकाई से तथा यथा संभव समान कठिनाई स्तर वाले होने चाहिए।
3. कठिनाई स्तर – 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन प्रश्न
4. आंकिक विधियों में आँकड़े दशमलव में एक स्थान से अधिक न हों।

अनुक्रमणिका

आदर्श प्रश्न–पत्र

प्रश्न **1. (A)** सही विकल्प चुनकर लिखिए : (5 अंक)

(i) व्यंजक $\frac{1}{x(x+2)}$ को आंशिक भिन्न के रूप में लिख सकते हैं :

(a) $\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]$ (b) $\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right]$

(c) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right]$ (d) $\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right]$

(ii) यदि $\text{Tan}^{-1}\frac{1}{5}=\theta$ हो तो $\cot\theta$ का मान होगा :

(a) $\cot^{-1} 5$ (b) 5 (c) $\frac{1}{5}$ (d) 1

(iii) बिन्दु (2, 1, 4) की y-अक्ष से दूरी होगी :

(a) $\sqrt{20}$ (b) 1 (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{10}$

(iv) समतल $2x-2y+z+3=0$ की मूलबिन्दु से दूरी है :

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{2}{3}$

(v) रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}$ और समतल $x+y+4=0$ के मध्य कोण है :

(a) 0° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

B. सत्य–असत्य बताइए : (5 अंक)

(i) सह–सम्बन्ध गुणांक का मान 1 से अधिक होता है।

(ii) सह–सम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य होता है।

(iii) $\sin x+\cos x$ का उच्चिष्ठ मान $\sqrt{2}$ है।

(iv) यदि गोले का केन्द्र c तथा उसका स्थिति सदिश $\vec{c}$ तथा त्रिज्या a हो तो गोले का समीकरण होगा $|\vec{r}-\vec{c}|=\vec{a}$.

(v) अचर राशि का अवकलन गुणांक शून्य होता है।

C. एक शब्द में उत्तर दीजिए : (5 अंक)

(i) दो सदिशों का अदिश गुणनफल किस नियम का पालन नहीं करता ?

(ii) सिम्पसन का नियम किस सिद्धान्त पर आधारित है ?

(iii) $\sqrt{\sqrt{x}}$ का अवकलन गुणांक क्या होगा ?

(iv) कार्य किस प्रकार की राशि है ?

(v) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ का समाकलन क्या होगा जबकि $f(x)$ विषम फलन हो ?

D. सही जोड़ी बनाइये : (5 अंक)

स्तम्भ **A**	स्तम्भ **B**
(a) $\int \cot^2 x dx$	(i) $lx + my + nz = p$
(b) समतल $\vec{r} \cdot (2i - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 1$ तथा $\vec{r} \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 4$ के बीच का कोण	(ii) $\frac{\pi}{4}$
(c) .6321E08 + .5736E05	(iii) $-(\cot x + x)$
(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$	(iv) .12057E09
(e) अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण	(v) $\cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{58}}$

E. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये : (5 अंक)

(i) $\sqrt{12}$ की प्रथम आवृत्ति का मान .... है।

(ii) $\int \sin^3 x dx$ का मान .... है।

(iii) यदि x-अक्ष पर समान अन्तराल पर दिए गए मानों की संगत ऊँचाई क्रमशः $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ हो तो समलम्बी नियम से क्षेत्रफल .... होगा।

(iv) e^{5x} का nवाँ अवकलज .... होगा।

(v) न्यूटन–रेफसन विधि में प्रथम आवृत्ति की स्थिति में यदि $f(x_0) = 4, f'(x_0) = 31, x_0 = 2$ तो x_1 का मान .... होगा।

प्रश्न 2. $\frac{x^3}{(1-x)^4}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए। (4 अंक)

अथवा

$\frac{1}{1+x^3}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि (4 अंक)

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{56}{65}.$$

अथवा

निम्नांकित को सरलतम रूप में लिखिए :

$$\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right).$$

प्रश्न 4. $\cot^{-1} x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन ज्ञात कीजिये। (4 अंक)

अथवा

x के सापेक्ष $\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right)$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. एक वृत्त की त्रिज्या 2 से.मी./सेकण्ड की एक समान दर से बढ़ रही है। क्षेत्रफल में वृद्धि किस दर से होगी जबकि त्रिज्या 10 से.मी. हो। (4 अंक)

अथवा

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ की अन्तराल $[1, 3]$ में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए।

प्रश्न 6. निम्न आँकड़ों से कार्ल–पियर्सन सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए। (4 अंक)

x :	65	66	67	68	69	70	71
y :	67	68	66	69	72	72	69

अथवा

सिद्ध कीजिये कि दो स्वतंत्र चरों के लिए कार्ल–पियर्सन का सह–सम्बन्ध गुणांक शून्य होता है। क्यों ?

प्रश्न 7. निम्नांकित आँकड़े दिए गए हैं : (4 अंक)

	x	y
स.मा.	36	85
प्रमाप विचलन	11	8

सह–सम्बन्ध गुणांक $= 0.66$

इनके आधार पर दोनों समाश्रय समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

निम्नांकित आँकड़ों के आधार पर y की x पर समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिए :

x	5	2	1	4	3
y	5	8	4	2	10

प्रश्न 8. यदि $y = a\cos px + b\sin px$ हो तो सिद्ध कीजिए : (4 अंक)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0.$$

अथवा

यदि $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(1+x)^2}$.

प्रश्न 9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1, 1, 1)$ तथा $(1, -1, 1)$ से होकर जाता हो तथा समतल $x + 2y + 2z = 5$ पर लम्ब हो। (5 अंक)

अथवा

एक समतल अक्षों को A, B, C पर मिलता है त्रिभुज ABC का केन्द्रक (a, b, c) है तो सिद्ध कीजिए कि समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ है।

प्रश्न 10. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए (5 अंक)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि

$$[\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{c}]^2.$$

प्रश्न 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^3}$ की गणना कीजिये। (5 अंक)

अथवा

निम्नलिखित फलन की $x = 0$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिये।

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

प्रश्न 12. $\int\frac{3x+1}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (5 अंक)

अथवा

$\int\frac{dx}{5+4\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cot x}{\tan x+\cot x}dx=\frac{\pi}{2}$. (5 अंक)

अथवा

परवलय $y^2 = 4ax$ और रेखा $y = mx$ के बीच घिर क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. अवकल समीकरण $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ को हल कीजिए। (5 अंक)

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$ को हल कीजिए।

प्रश्न 15. बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियों और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के, 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह से यदृच्छया एक बच्चा चुना जाता है। दिखाइये कि यदि तीन चुने हुए बच्चों में 1 लड़की और 2 लड़के हों तो इसकी प्रायिकता $\frac{13}{32}$ है। (5 अंक)

अथवा

एक साक्षात्कार में एक पद हेतु पति एवं पत्नी शामिल हुए, पति के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है, जबकि पत्नी के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। उनमें से किसी के भी न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ (6 अंक)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ तथा } \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

समतलीय है। रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

अथवा

समानान्तर रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{8}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 17. उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण (6 अंक)

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda)\,\mathbf{i} + (2 + 3\lambda)\,\mathbf{j} + (3 + 4\lambda)\,\mathbf{k}$$

$$\vec{r} = (2 + 3\mu)\,\mathbf{i} + (3 + 4\mu)\,\mathbf{j} + (4 + 5\mu)\,\mathbf{k} \text{ है।}$$

अथवा

उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, –1, 1) तथा समतलों $\vec{r}\,(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5$ तथा $\vec{r}\,(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 1$ की प्रतिच्छेदी रेखा से होकर गुजरे।

आदर्श उत्तर

प्रश्न **1.** (25 अंक)

(A) (i) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right]$ (ii) $b \to 5$ (iii) $a \to \sqrt{20}$ (iv) $c \to 1$ (v) $c \to 45°$.

(B) (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) सत्य

(C) (i) साहचर्य नियम (ii) परवलय (iii) $\frac{1}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}$ (v) अदिश (vi) 0

(D) (a) $\int \cot^2 x dx$ — (iii) $-(\cot x + x)$

(b) समतल $\vec{r}\ (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 1$ तथा $\vec{r}\ (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 4$ के बीच कोण — (v) $\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{58}}$

(c) .6321E081 + .5736E05 — (iv) .12057E09

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ — (ii) $\frac{\pi}{4}$

(e) अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण — (i) $lx + my + nz = p$

(E) (i) $\sqrt{12}$ की प्रथम आवृत्ति का मान **3.4642** है।

(ii) $\int \sin^3 x dx$ का मान $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$ है।

(iii) यदि x अक्ष पर समान अन्तराल पर दिए गए मानों की संगत ऊँचाई क्रमशः $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ हो तो समलम्बी नियम से क्षेत्रफल $\frac{h}{2}[(a_1 + a_7) + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)]$ होगा।

(iv) e^{5x} का nवाँ अवकलज $5^n e^{5x}$ होगा।

(v) न्यूटन–रेफसन विधि में प्रथम आवृत्ति की स्थिति में यदि $f(x_0) = 4, f'(x_0) = 31, x_0 = 2$ तो x_1 का मान 1.87 होगा।

प्रश्न **2.** $\frac{x^3}{(1-x)^4}$

हल : माना
$$1 - x = y$$
$$1 - y = x$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{(1-x)^4} = \frac{(1-y)^3}{y^4}$$ (2 अंक)

$$= \frac{1-3y+3y^2-y^3}{y^4} = \frac{1}{y^4} - \frac{3}{y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y}$$

y का मान रखने पर

$$= \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} \quad \text{(2 अंक)}$$

अथवा

$$\frac{1}{1+x^3}.$$

हल : $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$ अतः मानाकि

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} \qquad ....(1)$$

$\therefore$ $1 = A\,(1 - x + x^2) + (Bx + C)(1+ x)$ ....(2) (1 अंक)

अचरों के निर्धारण के लिए :

सर्वसमिका (2) के दोनों पक्षों में $1 + x = 0$ अर्थात् $x = 1$ रखने पर,

$1 = A\,(1 + 1 + 1) + (B ´ 1 + C)(1 - x)$

$1 = 3A, \frac{1}{3} = A$ (1 अंक)

अब समीकरण (2) के दोनों पक्षों में x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर

$0 = A + B$

$0 = \frac{1}{3} + B$

$\frac{-1}{3} = B$ (1 अंक)

पुनः सर्वसमिका (2) के दोनों पक्षों से अचर पदों की तुलना करने पर,

$1 = A + C \Rightarrow C = 1 - A$

$C = 1 - \frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$

अतः सर्वसमिका (1) में A, B व C के मान रखने पर

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} - \frac{x-2}{3(1-x+x^2)}. \quad \text{(1 अंक)}$$

प्रश्न **3.** $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

हल : माना $\cos^{-1}\frac{12}{13} = a$

$$\cos a = \frac{12}{13}$$

$\therefore$ $$\sin a = \frac{5}{13} \Rightarrow a = \sin^{-1}\frac{5}{12} \qquad ....(1)$$

$$\text{L.H.S.} = \sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13}$$ (1 अंक)

समी. (1) से $\cos^{-1}\frac{12}{13}$ का मान रखने पर

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}.$$ (1 अंक)

$\because$ $$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}$$

$\therefore$ $$\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} = \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{9}{25}}\right\}$$ (1 अंक)

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{4}{5}\right\}$$

$$= \sin^{-1}\frac{36+20}{65} = \sin^{-1}\frac{56}{65}.$$ (1 अंक)

अथवा

हल : $$\text{Tan}^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right).$$

$\cos x$ से अंश व हर को भाग देने पर

$\Rightarrow$ $$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$ (1 अंक)

$\Rightarrow$ $$\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)$$ (1 अंक)

$\Rightarrow$ $$\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} - x.$$ (2 अंक)

प्रश्न 4. $\cot^{-1} x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिये।

हल : माना कि $$f(x) = \cot^{-1} x$$

$$f(x + \delta x) = \cot^{-1}(x + \delta x)$$

अतः $$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\cot^{-1}(x+\delta x)-\cot^{-1}x}{\delta x} \quad ...(1)$$ (1 अंक)

माना कि
$$\cot^{-1}x = t$$
$$x = \cot t$$
$$x+\delta x = \cot(t+\delta t)$$
∴ $$\delta x = \cot(t+\delta t) - x$$
$$= \cot(t+\delta t) - \cot t$$

तथा यदि $\delta x \to 0$

$\delta t \to 0$

सर्वसमिका (1) में मान रखने पर,

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\cot^{-1}\cot(t+\delta t)-t}{\cot(t+\delta t)-\cot t}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{t+\delta t-t}{\cot(t+\delta t)-\cot t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t}{\cot(t+\delta t)-\cot t}$$ (1 अंक)

$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\sin(t+\delta t)\sin t.\delta t}{\cos(t+\delta t)\sin t-\cos t\sin(t+\delta t)}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\sin(t+\delta t).\sin t.\delta t}{\sin(t-t-\delta t)}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} -\frac{\sin(t+\delta t)\sin t.\delta t}{\sin\delta t}$$

$$= \sin t \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t}{\sin\delta t}\lim_{\delta t\to 0}\sin(t+\delta t)$$

$$= -\sin t\times 1\times\sin t$$

$$= -\sin^2 t = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 t} = \frac{-1}{1+\cot^2 t} - \frac{1}{1+x^2}$$ (1 अंक)

अथवा

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}) = \frac{d}{dx}\sin^{-1}(x\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}-\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}).$$

माना
$$x = \sin A$$
$$\sqrt{x} = \sin B$$ (1 अंक)

$$= \frac{d}{dx} \sin^{-1} (\sin A\sqrt{1-\sin^2 B} - \sin B\sqrt{1-\sin^2 A})$$

(1 अंक)

$$= \frac{d}{dx} \sin^{-1} (\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

$$= \frac{d}{dx} \sin^{-1} \sin (A - B) = \frac{d}{dx} (A - B)$$ (1 अंक)

$$= \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x - \sin^{-1} \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$ (1 अंक)

प्रश्न **5.**

हल : ज्ञात है : $\frac{dr}{dt} = 2$ c.m/sec. ....(1)

$r = 10$ c.m. (1 अंक)

ज्ञात करना है $\frac{dA}{dt} = ?$

हम जानते हैं $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r \quad ...(2)$$ (1 अंक)

समी. (1) और (2) का गुणा करने पर

$$\frac{dr}{dt} \times \frac{dA}{dr} = 2 \times 2\pi r$$ (1 अंक)

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 \times \pi \times 10 = 40\pi$$ वर्ग सें.मी./से. (1 अंक)

अथवा

हल : यहाँ हम देखते हैं कि :

(i) f (x), x का एक बहुपदीय फलन होने के कारण अन्तराल [1, 3] में संतत है।

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ जिसका अस्तित्व $x \in [1, 3]$ के सभी मानों के लिये है। इसलिए f(x), विवृत अन्तराल (1, 3) के लिये अवकलनीय होगा। (1 अंक)

(iii) $f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 11.1 - 6 = 0$, $f(3) = 3^3 - 6.3^2 + 11.3 - 6 = 0.$

$\therefore$ $f(1) = f(3)$ (1 अंक)

अतः सभी स्थितियों के लिये रोले प्रमेय संतुष्ट होती है।

अतः $x \in (1, 3)$ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $f'(c) = 0$. (1 अंक)

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 12c + 11 = 0.$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \left(2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

स्पष्टतया c के दोनों मान अन्तराल (1, 3) में स्थित है।

अतः रोले प्रमेय सिद्ध हुई। (1 अंक)

प्रश्न **6.** यहाँ $\bar{x} = 68$, $\bar{y} = 69$.

x	y	$x - \bar{x}$ (u_i)	$y - y_1$ (v_i)	$u_i v_i$ $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	u_i^2 $(x - \bar{x})^2$	v_i^2 $(y - \bar{y})^2$
65	67	–3	–2	6	9	4
66	68	–2	–1	2	4	1
67	66	–1	–3	3	1	9
68	69	0	0	0	0	0
69	72	1	3	3	1	9
70	72	2	3	6	4	9
71	69	3	0	0	9	0
$\Sigma x = 476$	$\Sigma y = 483$	$\Sigma u_i = 0$	$\Sigma v_i = 0$	$\Sigma u_i v_i = 20$	$\Sigma u_i^2 = 28$	$\Sigma v_i^2 = 32$

(2 अंक)

$$\rho(u, v) = \frac{n\Sigma u_i v_i - \Sigma u_i \Sigma v_i}{\sqrt{n\Sigma u_i^2 - (\Sigma u_i)^2}\sqrt{n\Sigma v_i^2 - (\Sigma v_i)^2}} = \frac{7 \times 20 - 0.0}{\sqrt{7 \times 28 - (0)^2}\sqrt{7 \times 32 - (0)^2}}$$

$$= \frac{140}{\sqrt{196}\sqrt{224}} = \frac{140}{209.56} = 0.668 = 0.67.$$ (2 अंक)

अथवा

यदि x एवं y दो स्वतंत्र चर हैं तो $Cov(x, y) = 0$.

हम जानते हैं कि

$$\therefore \qquad r(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{\sigma\ \sigma_y} = 0.$$ (2 अंक)

$$Cov(x, y) = 0.$$ (2 अंक)

प्रश्न **7.**

हल : दिया गया $\bar{x} = 36$, $\bar{y} = 85$, $\sigma_x = 11$, $\sigma_y = 8$, $\rho = 0.66$.

y का x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$y - \bar{y} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$ (1 अंक)

$$y - 85 = 0.66\ \frac{8}{11}\ (x - 36)$$ (1 अंक)

$$y - 85 = 0.48\ (x - 36)$$
$$y - 85 = .48x - 17.28$$

$\Rightarrow$ $$y = 0.48 + 67.72.$$

एवं x का y पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$x - \bar{x} = \rho\ \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{y})$$ (1 अंक)

$$x - 36 = .66\ \frac{11}{8}\ (y - 85)$$
$$x - 36 = 0.90\ (y - 85)$$
$$x - 36 = .90y - 76.5$$
$$x = .90y + 76.5.$$ (1 अंक)

अथवा

सारणी

x	y	xy	x^2	y^2
5	5	25	25	25
2	8	16	44	64
1	4	4	1	16
4	2	8	16	4
3	10	30	9	100
Sx = 15	Sy = 29	Sxy = 83	$Sx^2 = 55$	Sy^2 209

(1 अंक)

$$b_{yx} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{5 \times 83 - 15 \times 29}{5 \times 55 - 15 \times 15} = \frac{415 - 435}{275 - 225}$$

$$= -\frac{20}{50} = -0.4$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{x} = \frac{15}{5} = 3,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{x} = \frac{29}{5} = 5.8.$$ (1 अंक)

y का x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$y - \bar{y} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5.8 = 0.4\ (x - 3)$$ (1 अंक)

$y = -0.4x + 1.2 + 5.8$

$= -0.4x + 7.$ (1 अंक)

प्रश्न **8.**

हल : $y = a\cos px + b\sin px$ ....(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a\cos px + b\sin bx)$$ (1 अंक)

$$\frac{dy}{dx} = -ap\sin px + b\,p\cos px$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ap^2\cos px - bp^2\sin px$$ (1 अंक)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2(a\cos px + b\sin px)$$

समी. (1) से $a\cos px + b\sin px$ का मान y रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2y$$ (1 अंक)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0.$$ (1 अंक)

अथवा

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\sqrt{1+x} = -x\sqrt{1+y}$$ (1 अंक)

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$y^2(1+x) = x^2(1+y)$$ (1 अंक)

$$y^2(1+x) - x^2y - x^2 = 0$$

$$y = \frac{-(-x^2) \pm \sqrt{(-x^2)^2 - 4(1+x)\times -x^2}}{2(1+x)}$$

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2(x^2+4x+4)}}{2(1+x)} \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (1 अंक)

$$y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2(x+2)^2}}{2(1+x)}$$

$$y = \frac{x^2 \pm x(x+2)}{2(1+x)}$$

+ चिन्ह लेने पर

$$y = \frac{x^2 + x^2 + 2x}{2(1+x)}$$

$$y = \frac{2x^2 + 2x}{2(1+x)}$$

$$y = \frac{2x(x+1)}{2(1+x)}$$

$$y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

– चिन्ह लेने पर

$$y = \frac{x^2 - x^2 - 2x}{2(1+x)}$$

$$y = \frac{-2x}{2(1+x)}$$

$$y = -\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-[1+x-x]}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$ (1 अंक)

प्रश्न **9.**

हल : बिन्दु (1, –1, 1) से होकर जाने वाला समतल का समीकरण

$$a(x-1) + b(y+1) + c(z-1) = 0 \quad ...(i)$$ (1 अंक)

समतल (i) पर बिन्दु (–1, 1, 1) स्थित है

$\therefore$ $a(-1-1) + b(1+1) + c(1-1) = 0$

$$-2a + 2b = 0 \quad ...(ii)$$ (1 अंक)

समतल (i) के अभिलम्ब के दिक्–अनुपात a, b, c हैं।

समतल $x + 2y + 2z = 5$ ...(iii)

के अभिलम्ब के दिक्–अनुपात (1, 2, 2) हैं।

चूँकि (i) $\perp$ (iii) पर

$\therefore$ $1.a + 2b + + 2c = 0$ ...(iv) (1 अंक)

समी. (ii) व (iv) से $\frac{a}{4} = \frac{b}{4} = \frac{c}{-6} = k$

$\therefore$ $a = 4k$, $b = 4k$, $c = -6k$ ये मान समी. (i) में रखने पर

$$4k\,(x - 1) + 4k\,(y + 1) - 6k\,(z - 1) = 0$$

(2k का भाग देने पर) $2x + 2y - 3z + 3 = 0.$ (1 अंक)

अथवा

माना समतल का समीकरण है : $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$ ...(1)

यदि यह समतल निर्देशांक्षों को बिन्दुओं A, B, C पर मिलता है तो वे बिन्दु क्रमशः A $(\alpha, 0, 0)$, B $(0, \beta, 0)$ तथा C $(0, 0, \gamma)$ होंगे। (1 अंक)

$\therefore$ Δ ABC का केन्द्रक $\left(\dfrac{\alpha+0+0}{3}, \dfrac{0+\beta+0}{3}, \dfrac{0+0+\gamma}{3}\right)$ अर्थात् $\left(\dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{\beta}{3}, \dfrac{\gamma}{3}\right)$ है।

प्रश्नानुसार, केन्द्रक (a, b, c) है। (1 अंक)

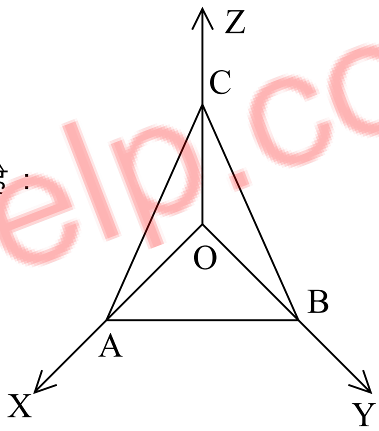
$\therefore$ $\dfrac{\alpha}{3} = a;\quad \dfrac{\beta}{3} = b;\quad \dfrac{\gamma}{3} = c$

$\Rightarrow$ $\alpha = 3a; \beta = 3; \gamma = 3c$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण (अन्तःखण्ड रूप में) है :

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 3.$



(चित्र पर 1 अंक)

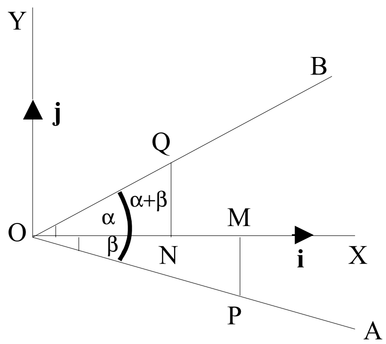
प्रश्न **10.**

हल : मानलो कागज के समतल में OX और OY दो लम्बवत् रेखाएँ हैं जो बिन्दु O पर काटती हैं। माना OX व OY के अनुदिश मात्रक सदिश क्रमशः **i** व **j** हैं। (1 अंक)

माना OX के नीचे एक रेखा OA है जो OX से कोण β बनाती है। माना OX के ऊपर एक रेखा OB है जो OX से α कोण बनाती है। तब,

$\angle AOB = \alpha + \beta$ (1 अंक)

OA पर एक बिन्दु P इस प्रकार लिया कि $OP = 1$, $PM \perp OX$ खींचा। OB पर एक बिन्दु Q इस प्रकार लिया कि $OQ = 1$ तथा $QN \perp OX$ खींचा। तब,



(चित्र पर 1 अंक)

$$\vec{OQ} = \vec{PN} + \vec{NQ}$$

$$= (\vec{ON} + \vec{NQ})$$
$$= (OQ \cos \alpha)\, \mathbf{i} + (OQ \sin \alpha)\, \mathbf{j}$$
$$= 1.\cos \alpha\, \mathbf{i} + 1.\sin \alpha\, \mathbf{j}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{OQ} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$$

तथा $$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

$$= (\vec{OM})\ \mathbf{i} + (\vec{MP})\ (-\mathbf{j})$$
$$= (OP \cos \beta)\, \mathbf{i} + OP \sin \beta\, (-\mathbf{j})$$

$\Rightarrow$ $$\vec{OP} = \cos \beta\, \mathbf{i} - \sin \beta\, \mathbf{j}$$

$\therefore$ $$\vec{OP} \times \vec{OQ} = (\cos \beta\, \mathbf{i} - \sin \beta\, \mathbf{j}) \times (\cos \alpha\, \mathbf{i} + \sin \alpha\, \mathbf{j})$$

$\Rightarrow$ $$\vec{OP} \times \vec{OQ} = [\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta]\, \mathbf{k}$$

$\Rightarrow$ $$|\vec{OP}|\ |\vec{OQ}| \sin (\alpha + \beta)\, \mathbf{k} = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\, \mathbf{k}$$
$\Rightarrow$ $$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$[\because\ |\vec{OQ}| = 1$ तथा $|\vec{OP}| = 1]$. (2 अंक)

अथवा

हल : $[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}]$

$$= [(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})].(\vec{c} \times \vec{a})$$ (1 अंक)

$$= [\vec{d} \times (\vec{b} \times \vec{c})].(\vec{c} \times \vec{a})$$ माना $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$

$$= [(\vec{d}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{d}.\vec{b})\vec{c}].(\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= [\{(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\}\vec{b} - \{(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{b}\}\vec{c}].(\vec{c} \times \vec{a})$$ (1 अंक)

$$= [[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\vec{b} - [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b}]\vec{c}].(\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= [[a\ b\ c]\ \vec{b} - 0].(\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= [[a\ b\ c]\vec{b}].(\vec{c} \times \vec{a})$$ (1 अंक)

$$= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}][\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$$

$$= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}][\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

$$= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2.$$ (2 अंक)

प्रश्न **11.**

हल : $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^3}$

माना $\sin^{-1} x = \theta.$ (1 अंक)

$x = \sin\theta \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta.$

$x \to 0 \Rightarrow \theta \to 0.$ (1 अंक)

$\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos\theta\,\theta^3} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta(1-1+2\sin^2\theta/2)}{\cos\theta\,\theta^3}$ (1 अंक)

$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}.2\frac{\sin^2\theta/2}{\frac{\theta^4}{4}.4} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}.\frac{2}{4}.\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\right)^2$ (1 अंक)

$= 1.\frac{1}{2}.1^2 = \frac{1}{2}.$ (1 अंक)

अथवा

हल : **L.H. Limit :** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(-h)}{(-h)^2}$ (1 अंक)

$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2}$ (1 अंक)

$= 2\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2.\frac{1}{4} = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$ (1 अंक)

R.H. Limit : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2}$ (1 अंक)

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 h/2}{h^2\times\frac{4}{4}} = \frac{2}{4}.\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

एवं $f(0) = \frac{1}{2}.$

इस प्रकार $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$

अतः फलन $x = 0$ पर सतत है। (1 अंक)

प्रश्न **12.**

हल : $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$

$$= -\frac{3}{2}\int\frac{(-2x-2)}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx - 2\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$$ (1 अंक)

$$= -\frac{3}{2}\frac{(5-2x-x^2)^{1/2}}{1/2} - 2\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-(x-1)^2}}$$ (1 अंक)

$$= -\frac{3}{2}.2\,(5-2x-x^2)^{1/2} - 2\,\sin^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{6}}$$ (1 अंक)

$$= -3\sqrt{5-2x-x^2} - 2\sin^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{6}}.$$ (2 अंक)

अथवा

हल :
$$I = \int\frac{dx}{5+4\sin x}$$

$$= \int\frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+4\times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ (1 अंक)

$$= \int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{5\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+8\tan\frac{x}{2}}$$ (1 अंक)

माना $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sec^2\frac{x}{2}dx = 2dt$ (1 अंक)

$\therefore$
$$I = 2\int\frac{dt}{5(1+t^2)+8t}$$ (1 अंक)

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+\frac{16}{25}+1-\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3/5} \tan^{-1} \frac{t + \frac{4}{5}}{3/5}$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{5t+4}{3} = \frac{2}{3} \tan^{-1} \left[\frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3} \right].$$ (1 अंक)

प्रश्न **13.**

हल : माना कि $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{\cot x}{\tan x + \cot x} dx$ ...(i)

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} dx$$ (1 अंक)

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$ (1 अंक)

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{\cot x + \tan x} dx$$ ...(ii) (1 अंक)

(i) व (ii) को जोड़ने पर

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x + \cot x}{\tan x + \cot x} dx$$ (1 अंक)

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx = [x]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

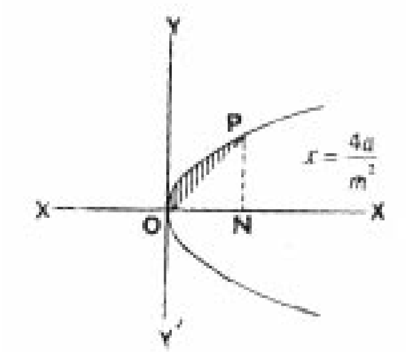
$$= \frac{\pi}{6}$$

$$I = \frac{\pi}{12}.$$ (1 अंक)

अथवा

हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(1)

रेखा का समीकरण $y = mx$ ...(2)



परवलय रेखा के X-उभयनिष्ट बिन्दुओं के लिये (2) से y का मान (1) में रखने पर

$$m^2x^2 = 4ax \Rightarrow x\,(m^2x - 4a) = 0.$$ (1 अंक)

$\therefore$ $$x = 0, \frac{4a}{m^2}.$$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = परवलय के भाग PON का क्षेत्रफल – रेखा द्वारा बने भाग PON का क्षेत्र

$$= \int_0^{4a/m^2} (y_1 - y_2)dx$$ (1 अंक)

$$= \int_0^{4a/m^2} (\sqrt{4ax} - mx)dx$$

$$= \int_0^{4a/m^2} (2\sqrt{ax} - mx)dx$$

$$= \left[2\sqrt{a}\frac{x^{3/2}}{3/2} - m\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a/m^2}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\frac{8a\sqrt{a}}{m^3} - \frac{m}{2}.\frac{16a^2}{m^4}$$ (1 अंक)

$$= \frac{32a^2}{3m^3} - \frac{8a^2}{m^3}$$

$$= \frac{8a^2}{3m^3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ (2 अंक)

प्रश्न **14.**

हल : $$\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x = 1.$$ (2 अंक)

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x.$$ (3 अंक)

जो कि $\frac{dy}{dx} + py = Q$ के रूप का है।

अथवा

हल : दिया गया समीकरण है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$ (1 अंक)

यह एक समघाती अवकल समीकरण है।

अतः $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर (1 अंक)

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + 5vx^2 + 4v^2x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 5v + 4v^2$$ (1 अंक)

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + 4v + 4v^2 = (2v+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{(2v+1)^2} = \frac{dx}{x},$$ (चर पृथक् करने पर)

$$\int \frac{dv}{(2v+1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2(2v+1)} = \log x + c$$ (1 अंक)

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{2\left(2.\frac{y}{x} + 1\right)} = \log x + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{2(x+2y)} = \log x + c$$ जो अभीष्ट हल है। (1 अंक)

प्रश्न **15.**

हल : एक लड़की एवं 2 लड़कों को निम्न प्रकार से चुना जा सकता है :

(i) प्रथम समूह से लड़कियों द्वितीय एवं तृतीय समूह से लड़कों को चुने जाने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}.$$ (1 अंक)

(ii) प्रथम समूह से लड़का एवं दूसरे समूह से लड़कियों एवं तीसरे समूह से लड़कों को चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}.$$ (1 अंक)

(iii) प्रथम समूह से लड़का दूसरे समूह से लड़के एवं तीसरे समूह से लड़कियों को चुने जाने की प्रायिकता

$$= \frac{9}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}.$$ (1 अंक)

$\therefore$ प्रत्येक समूह से 1 लड़की व 2 लड़के चुने जाने की प्रायिकता

$$= \frac{9}{32} \times \frac{3}{32} \times \frac{1}{32} = \frac{13}{32}.$$ (2 अंक)

अथवा

हल : पति के चुने जाने की प्रायिकता $P(A) = \frac{1}{7}$, पत्नी के चुने जाने की प्रायिकता $P(B) = \frac{1}{5}$

पति के चुने जाने की प्रायिकता $P(\bar{A}) = [1 - P(A)]$ (1 अंक)

$$= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$ (1 अंक)

पत्नि के चुने जाने की प्रायिकता $P(\bar{B}) = [1 - P(B)]$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$ (1 अंक)

दोनों में से किसी के भी न चुने जाने की प्रायिकता $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$

$$= \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{35}$$ (2 अंक)

प्रश्न **16.**

हल : रेखाएँ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ और $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ समतलीय होंगी।

(1 अंक)

यदि $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-1 & 3-2 & 4-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad 1(15 - 16) + 1(12 - 10) + 1(8 - 9) = 0 \Rightarrow -1 + 2 - 1 = 0$, जो सत्य है।

(1 अंक)

अतः दी हुई रेखाएँ समतलीय हैं।

अब प्रतिच्छेदी बिन्दु के लिये दी गई रेखा में।

माना $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = r$

$\therefore \quad x = 2r + 1, \quad y = 3r + 2, \quad z = 4r + 3.$ (1 अंक)

यदि दोनों रेखा प्रतिच्छेदी हैं तो x, y, z के ये मान दूसरी रेखा के समीकरण को संतुष्ट करेगी।

$$\therefore \qquad \frac{2r+1-2}{3} = \frac{3r+2-3}{4} = \frac{4r+3-r}{5}$$

हल करने पर $\quad r = -1.$ (1 अंक)

अतः प्रतिच्छेदी बिन्दु $\quad x = 2(-1) + 1 = -1$

$y = 3(-1) + 2 = -1$

$z = 4(-1) + 3 = -1$ (2 अंक)

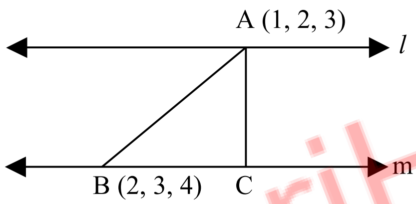
$(x, y, z) \rightarrow (-1, -1, -1).$

अथवा

दिया गया समान्तर रेखा का समीकरण

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ और } \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{8}$$ (1 अंक)

माना कि दी गई रेखा l और m है जिन पर क्रमशः A (1, 2, 3) तथा B (2, 3, 4) बिन्दु स्थित है।



(2 अंक)

बिन्दु A से रेखा m पर लम्ब AC बनाइए। हमें AC की लम्बाई ज्ञात करना है। रेखा m की दिक् कोज्याएँ (direction cosines) हैं :

$$\frac{4}{\sqrt{16+36+64}}, \frac{6}{\sqrt{16+36+64}}, \frac{8}{\sqrt{16+36+64}}$$ (1 अंक)

या $$\frac{4}{\sqrt{116}}, \frac{6}{\sqrt{116}}, \frac{8}{\sqrt{116}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}$$

BC = AB का m पर प्रक्षेप (projection)

$$= \frac{2}{\sqrt{29}}(2-1) + \frac{3}{\sqrt{29}}(3-2) + \frac{4}{\sqrt{29}}(4-3)$$

$$= \frac{9}{\sqrt{29}}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3 - \frac{81}{29}} = \sqrt{\frac{6}{29}}$$

अतः दी हुई समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी $= \sqrt{\frac{6}{29}}$. (2 अंक)

प्रश्न **17.**

हल : दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\vec{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \lambda\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{j})$$

$$\vec{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + \mu\,(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$ (1 अंक)

यहाँ $\vec{a_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\vec{b_1} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,

$\vec{a_2} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\vec{b_2} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} - \mathbf{i} - 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$ (1 अंक)

$$\therefore \quad \vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b_1} \times \vec{b_2} = \mathbf{i}\,(15 - 16) + \mathbf{j}\,(12 - 10) + \mathbf{k}\,(8 - 9)$$ (1 अंक)

$$\Rightarrow \quad \vec{b_1} \times \vec{b_2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

अतः न्यूनतम दूरी $= \dfrac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$ (1 अंक)

$$= \frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{6}} = \frac{-1+2-1}{\sqrt{6}} = 0.$$ (2 अंक)

अथवा

हल : उस समतल का समीकरण जो दिये गये समतलों की प्रतिच्छेदी रेखा से होकर गुजरता हो

$$\vec{r}\,(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 5 + \lambda\,\{\vec{r}\,(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 1\} = 0. \quad ...(1)$$ (1 अंक)

चूँकि यह $(3, -1, 1)$ या $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ से होकर जाता है।

$\therefore \quad (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\,.\,(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 5 + \lambda\,\{(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\,.\,(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 1\} = 0.$

$\Rightarrow \quad 6 + 3 + 1 - 5 + 1\,(3 - 5 - 2 - 1) = 0 \Rightarrow 5 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$ (1 अंक)

λ का मान समी. (1) में रखने पर

$$\vec{r}\,(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 5 + \vec{r}\,.\,(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 1 = 0$$ (1 अंक)

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\,\{(2 + 1)\,\mathbf{i} + (-3 + 5)\,\mathbf{j} + (1 - 2)\,\mathbf{k}\} - 6 = 0.$$

$$\vec{r}\,(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - 6 = 0$$ (3 अंक)

जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।